問題(1975 年東京大学)

赤玉が１個と白玉が３個入った容器Ａと、他に赤玉と白玉の入った容器ＢとＣがある。いま、A,B,C から無作為に１個ずつ合計３個の赤玉を取り出し、これからやはり無作為に１個をとってＡに返すという操作を繰り返す。ただし容器Ｂから赤玉が取り出される確率と白玉が取り出される確率はともに $\frac{1}{2}$ に保たれており、容器Ｃからは常に赤玉が取り出されるものとする。

(1)上記の操作をｎ回繰り返した時、容器Ａに χ 個の赤玉が入っている確率を

$P_n(\chi)$, ｎ=1, 2, 3, ……で表せば、関係式

$$P_{n+1}(\chi)=\frac{1}{12}(6+\chi)P_n(\chi)+\frac{1}{24}(1+\chi)P_n(\chi+1)+\frac{1}{8}(5-\chi)P_n(\chi-1)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし、$\chi \leqq -1$ または $\chi \geqq 5$ のときは $P_n(\chi)=0$ と定める。

(2)ｎ回目の操作を終えた時、Ａの中にある赤玉の数の期待値 E_n を求めよ。

(3) $\lim_{n \to \infty} E_n$ を求めよ。